

改进的 TOPSIS 法在计算机综合评价中的应用

李虎雄

(西北工业大学 自动化学院, 陕西 西安 710072)

摘 要: 针对 TOPSIS 法本身的缺陷, 对其进行了两方面的改进. 首先, 采用序关系分析法来计算各评价指标的权重以避免采用客观权重导致的各评价指标重要性主次颠倒或人为指定权重导致的各评价指标权重重要性偏差过大的问题. 其次, 采用向量投影法来避免传统 TOPSIS 方法在方案评选过程中存在距离理想解近的方案与负理想解也近的问题. 最后, 应用改进的方法对多个计算机的综合性能进行评价, 取得了合理的结果.

关键词: TOPSIS 法; 向量投影法; 性能评价

中图分类号: TP309

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2012)06-0138-04

Application of Improved TOPSIS Method to Comprehensive Evaluation of Computer

LI Hu-xiong

(School of Automatic, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: For the limitations of TOPSIS method, this paper makes two improvements. Firstly, it uses sequencing relationship analysis of each index to calculate the weight of the weight in order to avoid the use of objective evaluation result of the importance. Or man-made causes the specified weight of each evaluation index weights the importance of the problem of excessive deviation. Secondly, it uses Projection method to avoid the traditional TOPSIS method exists in the program selection process almost from the ideal solution and negative ideal solution programs are also close to the problem. Finally, it apply the method of multiple computers to improve the overall performance evaluation, and achieve reasonable results.

Key words: TOPSIS method; vector projection method; performance evaluation

1 引言

计算机综合评价涉及到很多的评价指标, 如何在众多的机器中对计算机的综合性能给出一个合理的评价是一个很重要的问题. TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution) 本身是一种适合多指标、多方案决策分析的新方法, 但其自身也存在一些问题^[1]. 本文将采用改进的 TOPSIS 法应用到计算机综合评价中, 首先引入序关系分析法^[2]来计算各评价指标的权重, 这样可以比较客观地反映各项指标的重要性, 从而避免采用客观权重法确定指标的权重而导致的主次重要性

颠倒的问题. 其次, 采用向量投影法来计算各评价方案与理想方案之间的贴适度, 从而避免 TOPSIS 法本身的缺陷——与理想解欧式距离小的方案可能与负理想解的欧式距离也小, 按相对欧式距离对方案排序的结果并不能完全反映出各方案的优劣性^[1].

2 TOPSIS 法及其改进

2.1 传统的 TOPSIS 法

TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution) 是由 Hwang 和 Yoon 于 1981 年首次提出. 后来由 Lai 于 1994 年将 TOPSIS 观念转为应用于规划面之多目标决策问题上.

TOPSTS 法是系统工程中有限方案多目标决策分析中常用的一种决策技术^[3].

设一个多属性决策问题的备选方案集为 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, 衡量方案优劣的属性向量为 $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$; 这时方案集 X 中的每个方案 $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 的 n 个属性值构成的向量 $Y_i = \{y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in}\}$, 它作为 n 维空间中的一个点, 能唯一地表征方案 x_i .

理想解 x^* 是一个方案集中并不存在的虚拟的最佳方案, 它的每个属性值都是决策矩阵中该属性的最好的值; 而负理想解 x^0 则是虚拟的最差方案, 它的每个属性值都是决策矩阵中该属性的最差的值. 在 n 维空间中, 将方案集 X 中的各个备选方案 x_i 与理想解 x^* 和负理想解 x^0 的距离进行比较, 即既靠近理想解又远离负理想解的方案就是方案集 X 中的最佳方案; 并可以据此排定方案集 X 中各备选方案的优先序^[4].

其评价步骤如下:

(1) 决策矩阵规范化.

设多属性决策问题的决策矩阵 $Y = \{y_{ij}\}$, 规范化决策矩阵 $Z = \{z_{ij}\}$, 则

$$z_{ij} = \frac{y_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m y_{ij}^2}}, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \quad (1)$$

(2) 构建加权决策矩阵 $X = \{x_{ij}\}$.

设由决策人给定的加权向量为 $w = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}^T$, 则

$$x_{ij} = w_j \cdot z_{ij}, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \quad (2)$$

(3) 确定理想解 x^* 和负理想解 x^0 .

设理想解 x^* 的第 j 个属性值为 x_j^* , 负理想解 x^0 的第 j 个属性值为 x_j^0 , 则

$$x_j^* = \begin{cases} \max_i x_{ij} & j \text{ 为越大越优型指标} \\ \min_i x_{ij} & j \text{ 为越小越优型指标} \end{cases}$$

$$j = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$x_j^0 = \begin{cases} \min_i x_{ij} & j \text{ 为越小越优型指标} \\ \max_i x_{ij} & j \text{ 为越大越优型指标} \end{cases}$$

$$j = 1, \dots, n \quad (4)$$

(4) 距离的计算

计算各方案到理想点之间的距离时, 一般采用欧式距离来计算. 其计算公式如下:

$$d_i^* = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{ij} - x_j^*)^2}, i = 1, \dots, m \quad (5)$$

$$d_i^0 = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{ij} - x_j^0)^2}, i = 1, \dots, m \quad (6)$$

(5) 贴近度的计算及其方案筛选

$$C_i^* = \frac{d_i^0}{(d_i^0 + d_i^*)}, i = 1, \dots, m \quad (7)$$

然后以相对贴近度作为待评对象的综合评价值, 根据相对贴近度的大小对各待评对象进行排序. 相对贴近度越大越优, 相对贴近度越小越劣. 本步骤按 C_i^* 由大到小排列方案的优劣顺序.

2.2 改进的 TOSPIIS 法

众所周知, 传统的 TOSPIIS 法的缺陷主要在两个方面, 它们分别是:

(1) 传统 TOPSIS 法是以距理想解与负理想解的距离为基础来判断方案的贴近理想解的程度, 这样就存在一个不容忽视之处: 与理想解欧氏距离近的方案可能与负理想解的距离也近, 按欧氏距离对方案进行排序的结果有时并不能完全反映出各方案的优劣性^[1].

(2) 对各评价指标赋权是多目标决策过程中的重要环节, 权重的确定方法主要有主观赋权法和客观赋权法, TOPSIS 决策方法中各指标的权重通常采用主观赋权法, 如专家评价法、层次分析法, 这种赋权方法虽然能较好地反映专家的经验, 但在某种程度上而言, 所确定的权重主观因素较多, 过于依赖决策者的主观判断, 往往不能反映各评价指标的实际, 存在不合理性和不公平性.

2.2.1 采用序关系法^[2]确定属性的权重

这里主要采用主观赋权法来确定属性的权重, 主要原因是客观赋权法虽然有比较完善的数学理论作为基础, 但是它却忽略了属性的主观判断. 序关系分析法的主要特点是有比较完善的数学理论, 能够准确反映决策者的主观决断, 而且, 计算过程也比较简单.

该方法主要分为以下三个步骤:

(1) 确定序关系

定义 1 若评价指标 x_i 相对于某评价准则的重要程度大于(或不小于) x_j 时, 则记 $x_i > x_j$.

定义 2 若评价指标 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 相对于某评价准则具有关系式:

$x_1^* > x_2^* > \dots > x_m^*$ 时, 则称评价指标 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 之间按“>”确定了序关系. 这里 x_i^* 表示 $\{x_i\}$ 按照序关系“>”排定顺序后的第 i 个评价指标($i =$

1,2,...,m).

这样就唯一确定了一个序关系. 对于某些问题来说, 仅仅给出了序关系还不够, 还要确定出各评价指标对于某评价准则的权重系数. 为了书写方便和不失一般性, 以下仍然记为

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_m \tag{8}$$

(2) 给出 x_{k-1} 与 x_k 之间相对重要程度的比较判断

设决策者关于评价指标 x_{k-1} 与 x_k 之间的重要程度之比 $\frac{w_{k-1}}{w_k}$ 的理性判断分别为 $\frac{w_{k-1}}{w_k} = r_k, k = m, m-1, m-2, \cdots, 3, 2$, 当 m 较大时, 由序关系可取 $r_m = 1. r_k$ 的赋值可参考表 1.

表 1 r_k 赋值参考表

r_k	说明
1.0	指标 x_{k-1} 与 x_k 具有同样重要性
1.2	指标 x_{k-1} 比指标 x_k 稍微重要
1.4	指标 x_{k-1} 比指标 x_k 明显重要
1.6	指标 x_{k-1} 比指标 x_k 强烈重要
1.8	指标 x_{k-1} 比指标 x_k 极端重要

(3) 权重系数 w_k 的计算

若决策者给出 r_k 的理性赋值, 则 w_m 为

$$w_m = (1 + \sum_{k=2}^m \prod_{i=k}^m r_i)^{-1} \tag{9}$$

而

$$w_{k-1} = r_k w_k, k = m, m-1, \cdots, 3, 2 \tag{10}$$

2.2.2 采用向量投影法来比较方案的优劣

传统 TOPSIS 法是以距理想解与负理想解的距离为基础来判断方案的贴近理想解的程度, 这样就存在一个不容忽视之处: 与理想解欧氏距离近的方案可能与负理想解的距离也近, 按欧氏距离对方案进行排序的结果有时并不能完全反映出各方案的优劣性^[1]. 我们这里采用向量投影法来判定各方案与理想解的贴近程度.

定理 1 设 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_m)^T, \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$ 为两个任意 m 维列向量. 则称

$$\gamma_\beta^\alpha = \|\alpha\| \times \frac{\alpha^T \beta}{\|\alpha\| \|\beta\|} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}} \tag{11}$$

为向量 α 在 β 上的投影.

2.2.3 决策过程

改进的 TOPSIS 法的决策过程如下:

(1) 决策矩阵规范化.

设多属性决策问题的决策矩阵 $Y = \{y_{ij}\}$, 规范化决策矩阵 $Z = \{z_{ij}\}$, 则:

$$z_{ij} = \frac{y_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m y_{ij}^2}}, i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n \tag{12}$$

(2) 构建加权决策矩阵 $X = \{x_{ij}\}$.

设由序关系分析法确定的加权向量为 $w = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}^T$, 则

$$x_{ij} = w_j \cdot z_{ij}, i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n \tag{13}$$

(3) 确定理想解 x^* .

设理想解 x^* 的第 j 个属性值为 x_j^* , 则

$$x_j^* = \begin{cases} \max_i x_{ij} & j \text{ 为越大越优型指标} \\ \min_i x_{ij} & j \text{ 为越小越优型指标} \end{cases}$$

$$j = 1, \cdots, n \tag{14}$$

(4) 利用式(11)计算各方案加权属性值向量在 x_j^* 上的投影.

(5) 最后根据投影的大小对方案进行排序和择优.

3 计算机最优方案评选

现有 5 台被评价的计算机, 它们分别是假设有一个计算机性性能的总体评价方案. 现在有 4 种待评测的计算机可供选择, 决策者根据计算机的性能和费用, 考虑了 7 项评价指标: $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$: u_1 ——mips(每秒百万条指令), u_2 ——每秒所执行的浮点运算次数(Million flops/sec), u_3 ——存储带宽(MB/s), u_4 ——存储容量(单位为 GB), u_5 ——信息安全性(百分制), u_6 ——可靠性(百分制). 前面 5 项为定量指标, 后面 1 项为定性指标. 最后一项由专家组成员对 u_6 进行打分评测.

每种计算机的各项指标的属性值如表 2 所示.

表 2 的决策矩阵

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	2 101	1 254.81	661	160	65	88
x_2	3 044	1 391.03	811	120	80	84
x_3	2 005	962.05	317	120	60	80
x_4	2 482	1 976.2	587	80	63	77

3.1 属性权重的确定

假设专家认为 $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ 各属性之间

具有如下序关系

$$u_1 > u_3 > u_2 > u_4 > u_6 > u_5 \Rightarrow u_1^* > u_2^* > u_3^* > u_4^* > u_5^* > u_6^* ;$$

且给出

$$r_2 = \frac{u_1^*}{u_2^*} = 1.8, \quad r_3 = \frac{u_2^*}{u_3^*} = 1.2, \quad r_4 = \frac{u_3^*}{u_4^*} =$$

$$1.4, \quad r_5 = \frac{u_4^*}{u_5^*} = 1.2, \quad r_6 = \frac{u_5^*}{u_6^*} = 1.6;$$

而

$$\begin{aligned} r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 &= 5.8061, \quad r_3 r_4 r_5 r_6 = 3.2256, \\ r_4 r_5 r_6 &= 2.6880, \quad r_5 r_6 = 1.92, \quad r_6 = 1.6, \\ r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 + r_3 r_4 r_5 r_6 + r_4 r_5 r_6 + r_5 r_6 + r_6 &= \\ 15.2197; \end{aligned}$$

所以

$$u_6^* = (1 + 15.2197)^{-1} = 0.0617$$

$$u_5^* = u_6^* * r_6 = 0.0617 * 1.6 = 0.0987$$

$$u_4^* = u_5^* * r_5 = 0.0987 * 1.2 = 0.1184$$

$$u_3^* = u_4^* * r_4 = 0.1184 * 1.4 = 0.1685$$

$$u_2^* = u_3^* * r_3 = 0.1685 * 1.2 = 0.2022$$

$$u_1^* = u_2^* * r_2 = 0.2022 * 1.8 = 0.3640$$

故各属性指标 $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ 的权重系数为

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^* = 0.3640, u_2 = u_3^* = 0.1685, u_3 = \\ u_2^* &= 0.2022, u_4 = u_4^* = 0.1184, u_5 = u_5^* = 0.0617, \\ u_6 &= u_6^* = 0.0987, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{权重向量 } t &= (0.3640, 0.1685, 0.2022, 0.1184, 0.0617, 0.0987). \end{aligned}$$

3.2 决策矩阵规范化

根据式(12),规范化后的决策矩阵为

$$z = \begin{bmatrix} 0.4301 & 0.4345 & 0.5327 & 0.6489 & 0.1354 & 0.5343 \\ 0.6232 & 0.4817 & 0.6536 & 0.4867 & 0.1666 & 0.5100 \\ 0.4105 & 0.3331 & 0.2555 & 0.4867 & 0.1249 & 0.4857 \\ 0.5081 & 0.6843 & 0.4731 & 0.3244 & 0.1312 & 0.4675 \end{bmatrix}$$

3.3 构建加权矩阵

由权重向量 $t = (0.3640, 0.1685, 0.2022, 0.1184, 0.0617, 0.0987)$, 得到加权矩阵 $X =$

$$\begin{bmatrix} 0.1566 & 0.0732 & 0.1077 & 0.0768 & 0.0084 & 0.0527 \\ 0.2268 & 0.0812 & 0.1322 & 0.0576 & 0.0103 & 0.0503 \\ 0.1494 & 0.0561 & 0.0517 & 0.0576 & 0.0077 & 0.0479 \\ 0.1849 & 0.1153 & 0.0957 & 0.0384 & 0.0081 & 0.0461 \end{bmatrix}$$

3.4 确定理想解

根据式(14)可知,正理想解向量为

$$X^*$$

$$= \{0.2268, 0.1153, 0.1322, 0.0768, 0.0103, 0.0527\}.$$

3.5 计算各方案在正负理想解上的投影

记 $\gamma_i (i=1, 2, 3, 4)$ 为第 i 个方案在理想解上的投影,则可得到

$$\gamma_1 = 0.2220, \gamma_2 = 0.2742, \gamma_3 = 0.1711, \gamma_4 = 0.2350.$$

由投影结果可以得到,这四个方案的排序结果如下:

$$X_2 > X_4 > X_1 > X_3.$$

4 结束语

(1) 在多属性决策项目中,对各评价指标的各属性值赋权是决策过程中的重要环节,影响到最终评价结果的合理性. 为能根据各个评价指标的本身的重要性赋以合理的权重,我们采用序关系分析法来确定,该方法合理、简单、能够比较准确的反映出评价者的主观判断.

(2) 本文采用向量投影法改进 TOPSIS 法,改进的方法可避免距理想解近的方案与负理想解也近的问题,使改进后的方法 TOPSIS 法更加科学、合理性,且模型计算相对简单.

(3) 本文的方法计算简便、思路清晰、计算结果合理,还可应用于项目决策、其他方面的性能评价等方面,具有广泛的应用前景.

参考文献:

- [1] 张先起,梁川. 改进的 TOPSIS 模型及其在黄河置换水量分配中的应用[J]. 四川大学学报:工程科学版, 2006 (1):30-33
- [2] 郭亚军. 综合评价理论、方法及应用[M]. 北京:科学出版社,2007.
- [3] 王永兰,孙雷. 改进的 TOPSIS 法在油气田开发中的应用[J]. 西南石油大学学报:自然科学版, 2008:109-111.
- [4] 岳超源. 决策理论与方法 [M]. 北京:科学出版社, 2009

作者简介:

李虎雄 男,(1971—),博士研究生. 研究方向为无线网络、超宽带、图像处理方向.